Κανονική Κατανομή

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ. Χ λέγεται κανονική με παραμέτρους μ και σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ αν οι τιμές της τ.μ Χ, $x \in \mathbb{R}$ και η σ.π.π

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

Συμβολισμός: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

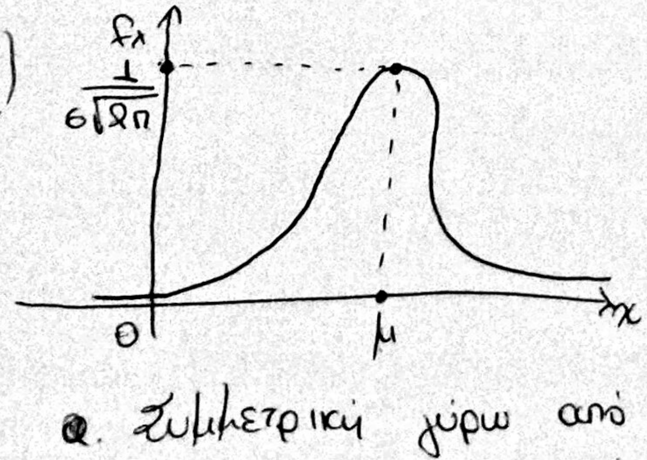
Ιδιότητες της κανονικής κατανομής

1) Η f_X είναι σ.π.π

α. $f_X(x) \geq 0$

β. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (Απόδειξη βασίζεται $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi}$

2)



α. Συμμετρική γύρω από το μ

β. Παίρνει την μέγιστη τιμή της στο μ και η μέγιστη τιμή είναι $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

3) Μορφή α.σ.κ

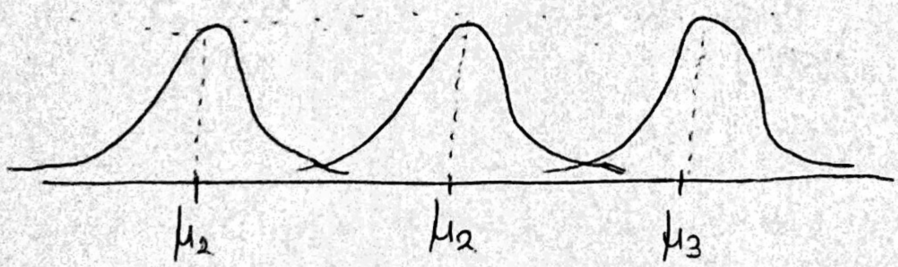
$$F_X(x) \overset{\text{op}}{=} P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά.

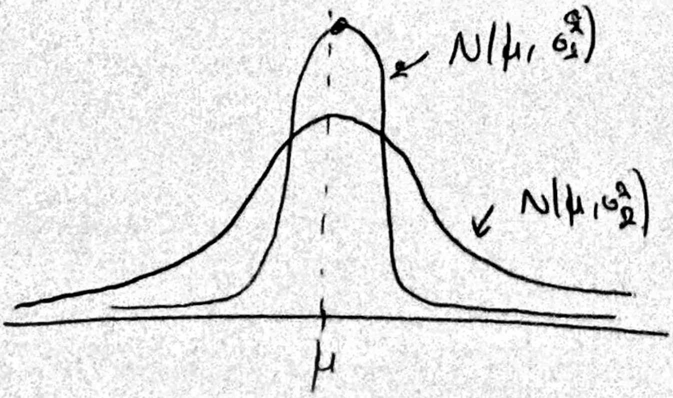
4) Φυσική ερμηνεία των παραμέτρων μ και σ^2

- Θεωρούμε κανονικές κατανομές $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$, $N(\mu_3, \sigma^2)$ όπου $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$



Το μ εκφράζει το σημείο στην πραγματική ευθεία γύρω από το οποίο συγκεντρώνεται η κατανομή. Τα σημεία γύρω από το οποίο κατανέμεται μάζα πιθανότητας ή εμβαδόν ίσο με τη μονάδα.
Το μ είναι παράμετρος θέσης της κατανομής.

- Θεωρούμε με $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, $N(\mu, \sigma_1^2)$, $N(\mu, \sigma_2^2)$



Το $σ^2$ εκφράζει τον βαθμό συγκέντρωσης της κατανομής γύρω από το μ.

5) Ιδιότητα αναλλοίωτου της κανονικής κατανομής κάτω από γραμμικούς μετασχηματισμούς.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

Έστω $X \sim N(\mu, σ^2)$. Τότε η τ.μ $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2 σ^2)$
$a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

<u>Ειδική Περίπτωση</u> : $b = -\frac{\mu}{σ}$, $a = \frac{1}{σ}$

<u>Πόρισμα</u>

Αν $X \sim N(\mu, σ^2)$ τότε η τ.μ $Z = aX + b = \frac{1}{σ}X - \frac{\mu}{σ} = \frac{X-\mu}{σ}$

Άρα $Z \sim N\left(\frac{\mu}{σ} - \frac{\mu}{σ} = 0, \frac{1}{σ^2}σ^2 = 1\right)$

Ο μετασχηματισμός $Z = \frac{X-\mu}{σ}$ ονομάζεται τυπικός

<u>Η $N(0,1)$ ονομάζεται τυπική κανονική κατανομή</u>

1) σ.π.π : Αν $Z \sim N(0,1)$ τότε $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

2) α.σ.κ : Συμβολίζεται με Φ

$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ $\quad z \in \mathbb{R}$

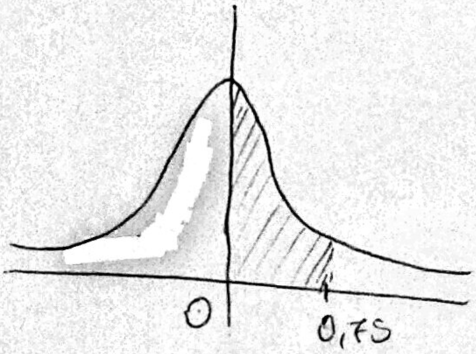
Δεν μπορεί να υπολογίζεται αναλυτικά.

Πως υπολογίζω πιθανότητες με μια $N(0,1)$ τ.μ Z? → Πίνακες Τυπικής Κατανομής

Συγκεκριμένος Πίνακας δίνει πιθανότητες της μορφής $P(0<Z<z)$ με $Z \sim N(0,1)$ $z>0$

Παράδειγμα

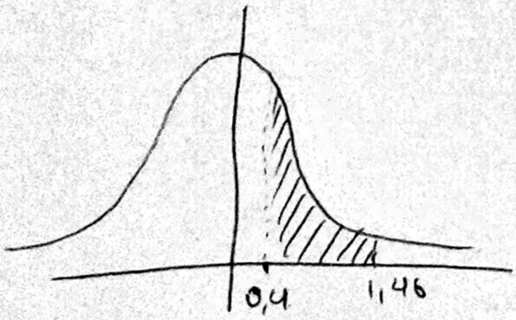
1) Έστω τ.μ $Z \sim N(0,1)$. Να υπολογιστούν $P(0<Z<0{,}75) = 0{,}2734$



2) Έστω τ.μ $Z \sim N(0,1)$. Να υπολογιστούν $P(0{,}4<Z<1{,}46) =$

$= P(0<Z<1{,}46) - P(0<Z<0{,}4) =$

$= 0{,}4279 - 0{,}1554$

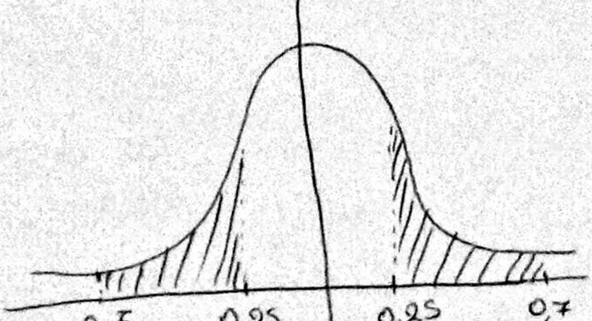


3) Έστω τ.μ $Z \sim N(0,1)$ Να υπολογιστούν. $P(-0{,}7<Z<-0{,}25) =$

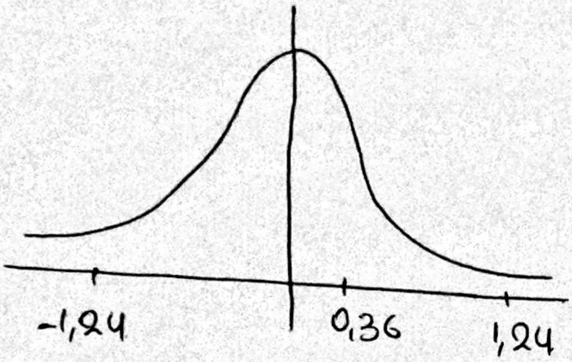
$= P(0{,}25<Z<0{,}7) =$

$= P(0<Z<0{,}7) - P(0<Z<0{,}25)$

$= 0{,}2580 - 0{,}0987$



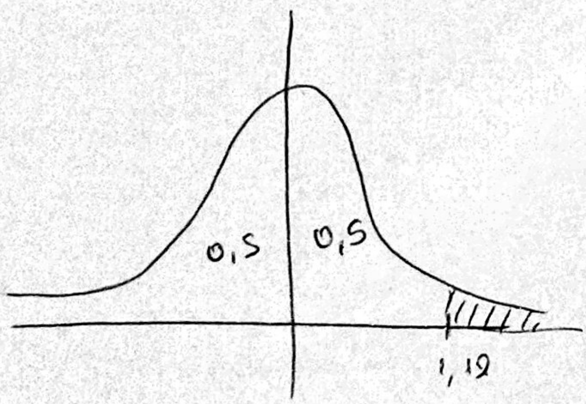
4) Έστω τ.μ $Z \sim N(0,1)$. Να υπολογιστούν $P(-1,24 < Z < 0,36) =$



$= P(0 < Z < 1,24) + P(0 < Z < 0,36) =$

$= 0,3925 + 0,1406$

5) Έστω τ.μ $Z \sim N(0,1)$ Να υπολογιστούν $P(Z > 1,12) =$

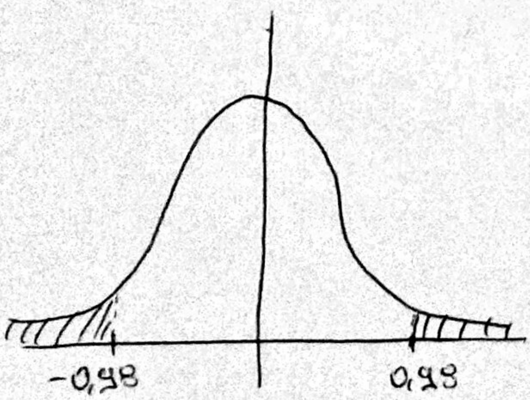


$= 1 - P(Z \leq 1,12) =$

$= 1 - [0,5 + P(0 < Z < 1,12)] =$

$= 0,5 - 0,3686$

6) Έστω τ.μ $Z \sim N(0,1)$ Να υπολογιστούν $P(Z < -0,98) =$



$= P(Z \geq 0,98) =$

$= 1 - [0,5 + P(0 < Z < 0,98)] =$

$= 0,5 - 0,3365$